

**МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ГОРОДСКОГО ОКРУГА КОРОЛЁВ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
«СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 20»**

Россия, Московская область, город Королёв, проспект Космонавтов, дом 5а

тел./ факс (495) 512-54-50

Рассмотрено на заседании
методического (педагогического) совета
от « » 20 г.
Протокол №

Утверждаю:
Директор МБОУ СОШ № 20
Г.В. Осьмакова

Приказ № _____

« » 20 г.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ
ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ ПРОГРАММА**

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК»

10 КЛАСС

Уровень: стартовый

Срок реализации программы: 1 год

Направленность: естественнонаучная

Возраст детей: 15-17 лет

Разработчик программы:
Магнитский М.В.
педагог дополнительного образования,

г.о.Королев
2026 г

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
2. УЧЕБНЫЙ ПЛАН	7
3. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ	7
4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	9
5. КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК	11
6. КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ	11
7. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ	14
8. ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ	15
9. ЭЛЕКТРОННЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ	16

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Нормативные основания и статус программы

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Математический кружок» относится к естественнонаучной направленности и предназначена для углублённого математического развития обучающихся. Содержание, последовательность тем и формы работы определяются логикой дополнительного образования и не подменяют обязательную образовательную программу школы.

При разработке программы учтены следующие нормативные и программно-методические ориентиры:

- Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (в действующей редакции);

- приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 27.07.2022 № 629 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам»;

- Концепция развития дополнительного образования детей до 2030 года, утверждённая распоряжением Правительства Российской Федерации от 31.03.2022 № 678-р (в действующей редакции);

- постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 02.06.2026 № 19 «Об утверждении СП 2.4.2.4283-26 “Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи”» (вступает в силу с 01.09.2026);

- ФГОС и федеральные образовательные программы соответствующего уровня общего образования — как ориентиры возрастной сложности, образовательных результатов и недопущения неоправданного дублирования обязательного содержания.

ФГОС и федеральные образовательные программы не рассматриваются как документы, напрямую задающие содержание данной ДООП. Они используются для сопоставления возрастной сложности, универсальных способов деятельности и соответствия содержания возрастным возможностям обучающихся.

Методические ориентиры

Программа строится на деятельностном, проблемном и исследовательском подходах к обучению математике. Основное внимание уделяется самостоятельному поиску способа решения, анализу математической структуры задачи, выдвижению и проверке гипотез, сравнению различных способов рассуждения и аргументированному представлению полученного результата. Изучение нового материала по возможности начинается с содержательной задачи, проблемной ситуации или математического эксперимента. Необходимые понятия, обозначения и общие способы вводятся по мере возникновения содержательной потребности в них.

Значительная часть заданий допускает несколько способов решения, различные уровни продолжения и постановку дополнительных вопросов. При подборе задач предусматривается доступный начальный этап работы и возможность дальнейшего углубления для обучающихся с более высокой математической подготовкой.

Особое внимание уделяется математическому рассуждению: обучающиеся формулируют предположения, проверяют их на частных случаях, ищут контрпримеры, отделяют наблюдение от доказанного утверждения, строят доказательство и оценивают достаточность аргументации.

Важной частью занятия является обсуждение решений: сравниваются не только ответы, но и способы работы, рациональность выбранного метода, полнота доказательства, возможность обобщения результата и применимость найденного подхода к другим задачам.

Из этого подхода вытекают основные правила организации занятия:

- содержательная задача или исследовательская ситуация появляется раньше готового алгоритма;
- у обучающегося есть время на собственный поиск, пробу, ошибку, рисунок, таблицу, вычислительный эксперимент или построение частных случаев;
- обсуждается не только ответ, но и способ: почему он работает, где его границы, чем один путь отличается от другого;
- после решения следует математическое продолжение: обобщение, контрпример, изменение условия, собственная задача или новый исследовательский вопрос.

Актуальность и педагогический замысел

В профильной старшей школе значительная часть учебного математического времени посвящена сложным уравнениям, параметрам, геометрии и экзаменационной подготовке. Дополнительная программа выполняет иную функцию: показывает старшекласснику математику как развивающуюся систему идей и даёт опыт работы с понятиями и методами, выходящими за рамки обязательной школьной траектории.

Содержание программы расширяет представление старшеклассника о математике за пределами привычного школьного набора тем. Цель не в досрочном прохождении университетского курса, а в знакомстве с новыми математическими объектами и идеями — комплексной плоскостью, функциональными уравнениями, альтернативными геометриями, фракталами и топологическими моделями — через задачи, обсуждение и самостоятельное исследование.

Новизна и отличительные особенности

Курс строится как серия компактных входов в области высшей математики. Комплексные числа рассматриваются геометрически, функциональные уравнения — как задачи на структуру функции, проективная и неевклидова геометрия — как пересмотр привычных аксиом, фракталы и динамические системы — как исследование итераций, топология — как язык свойств, сохраняющихся при деформации. В конце года учащийся выбирает одну линию для мини-исследования.

Педагогическая целесообразность

Вместо обзорных лекций используются задачи и эксперименты, из которых возникает необходимость нового определения. На каждом модуле есть «точка удивления»: результат, который противоречит школьной интуиции и требует перестройки модели. Обязательны математический семинар, работа с коротким научно-популярным или учебным текстом и письменное объяснение одной идеи своими словами.

Возрастные особенности обучающихся

В 15–17 лет учащиеся способны работать с абстрактным определением, если видят его мотивацию и примеры. Старшеклассникам важно предоставлять выбор и интеллектуальную автономию, поэтому часть задач имеет несколько уровней продолжения, а итоговая работа допускает выбор темы и формата исследования в пределах программы.

Направленность и характер программы

Направленность программы — естественнонаучная. Программа имеет углубляющий характер. Углубление понимается не как механическое опережение школьного курса, а как расширение математического кругозора, освоение новых способов рассуждения и постепенный переход к самостоятельной исследовательской работе.

Цель программы

Открыть десятиклассникам несколько самостоятельных областей высшей математики и сформировать опыт освоения нового определения через задачу, исследование примеров, построение гипотезы и доказательство.

Задачи программы

Предметные задачи

- сформировать содержательное понимание комплексных чисел и их геометрии, включая модуль, аргумент, умножение, корни и корни из единицы;
- освоить базовые стратегии решения функциональных уравнений: специальные подстановки, симметрия, замена переменных, использование дополнительных условий;
- познакомить с идеями проективной геометрии, сферической геометрии и модели Пуанкаре;
- исследовать самоподобие, итерации, простые динамические системы и фрактальные конструкции;
- ввести наглядные топологические понятия через лист Мёбиуса, эйлерову характеристику и деформации;
- создать опыт самостоятельного изучения небольшой новой математической темы по нескольким источникам.

Метапредметные задачи

- развивать умение осваивать новое определение через систему примеров и антипримеров;
- учить различать аксиому, определение, наблюдение, теорему и модель;
- формировать навык перехода между алгебраическим, геометрическим и визуальным представлением;
- развивать самостоятельное чтение короткого математического текста и постановку уточняющих вопросов;
- учить строить компьютерный эксперимент для итерационного процесса и интерпретировать его осторожно;
- совершенствовать научно-популярное объяснение сложной идеи без потери математического смысла.

Личностные задачи

- расширять представление о математике как о современной и развивающейся науке;
- поддерживать интеллектуальную смелость при встрече с непривычными аксиомами и объектами;
- формировать готовность самостоятельно выбирать глубину исследования и отвечать за качество результата;
- развивать уважение к точному определению как к инструменту мышления;
- создавать основу для осознанного выбора математических, инженерных, ИТ- и естественно-научных направлений обучения.

Разделение задач на предметные, метапредметные и личностные носит аналитический характер. На занятии они реализуются совместно: содержательная математическая задача одновременно требует предметного действия, организации поиска, коммуникации и личной ответственности за качество аргументации.

Адресат, объём, срок и режим реализации

Программа рассчитана на обучающихся 15–17 лет. Срок реализации — 1 учебный год. Общий объём — 68 академических часов. Занятия проводятся 1 раз в неделю по 2 академических часа в течение 34 учебных недель. Конкретные даты и режим перерывов устанавливаются образовательной организацией с учётом действующих санитарных требований и локальных актов.

Параметр	Характеристика
Возраст / класс	15–17 лет
Срок реализации	1 учебный год
Объём	68 академических часов
Периодичность	1 раз в неделю
Продолжительность занятия	2 академических часа
Форма обучения	очная, групповая; допускается индивидуальная и парная работа внутри занятия

Формы организации деятельности

- математическая мастерская и практикум по решению нестандартных задач;
- работа с открытой задачей и исследовательской ситуацией;
- математическая игра, эксперимент, конструирование или моделирование;
- работа в парах и малых группах с последующей защитой решения;
- математический семинар, разбор нескольких способов решения, взаимное рецензирование;
- мини-исследование, авторская задача или проект математической направленности.

Модель двухчасового занятия

- 1) Проблемный вход. Педагог предлагает задачу, игру, конструкцию, наблюдение или вопрос без заранее объявленного способа решения.
- 2) Самостоятельный поиск. Обучающиеся строят примеры, рисунки, таблицы и модели, проверяют частные случаи, фиксируют неудачные попытки.
- 3) Совместное исследование. В парах или группе сравниваются идеи, формулируются гипотезы, ищутся контрпримеры и уточняются условия.
- 4) Математическая формализация. Понятие, обозначение, теорема или общий способ вводятся тогда, когда в них возникла содержательная необходимость.
- 5) Доказательство и перенос. Участники обосновывают результат, представляют решение и применяют найденную идею к изменённой ситуации или собственному вопросу.

Деление часов на теоретические и практические в учебном плане носит организационный характер. Теоретический материал не предполагает преобладания лекционного изложения: значительная его часть выводится из решения задач и обсуждения найденных закономерностей.

Дифференциация и индивидуализация

Ключевой механизм дифференциации — не разделение группы на «сильных» и «слабых», а многоуровневое продолжение одной математической ситуации. Базовый вход позволяет понять условие и начать работу; последующие уровни требуют поиска закономерности, доказательства, обобщения, построения контрпримера или постановки собственного вопроса. Педагог варьирует объём подсказки, количество промежуточных вопросов и глубину продолжения, сохраняя общий предмет обсуждения для всей группы.

2. УЧЕБНЫЙ ПЛАН

Учебный план отражает распределение часов между содержательными модулями. Практическая составляющая преобладает; «теория» означает время на введение и обсуждение математического языка, определений, общих идей и доказательств, возникающих из решения задач.

№	Раздел программы	Теория	Практика	Всего
1	Комплексные числа и геометрия комплексной плоскости	3	13	16

№	Раздел программы	Теория	Практика	Всего
2	Функциональные уравнения	2	10	12
3	Проективная и неевклидова геометрия	3	11	14
4	Фракталы и динамические системы	2	8	10
5	Наглядная топология	2	6	8
6	Исследовательский семинар	2	6	8
	ИТОГО	14	54	68

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Содержание организовано не как последовательность школьных параграфов, а как ряд математических сред, в которых обучающийся осваивает новый способ действия через проблему, исследование и обоснование.

1. Комплексные числа и геометрия комплексной плоскости — 16 часов

Математическое содержание. Комплексное число как новая числовая система; Арифметика комплексных чисел и комплексная плоскость; Модуль и аргумент; Геометрический смысл сложения и умножения; Тригонометрическая форма и формула Муавра; Корни комплексного числа; Корни из единицы и симметрии правильных многоугольников; Комплексный практикум: геометрические места точек.

Ведущая деятельность. Новая числовая система осваивается одновременно алгебраически и геометрически: учащиеся выполняют операции, изображают их на комплексной плоскости, связывают модуль и аргумент с преобразованиями и исследуют геометрические места точек. Формула Муавра и корни из единицы выводятся как инструменты для объяснения наблюдаемой симметрии.

Форма результата раздела: семинарское решение или мини-исследование, включающее постановку вопроса, корректное использование определений, доказательный или вычислительный фрагмент и указание границ применимости результата.

2. Функциональные уравнения — 12 часов

Математическое содержание. Что такое функциональное уравнение; Метод специальных подстановок; Симметрия аргументов и замена переменных; Функциональные уравнения на целых и рациональных числах; Дополнительные условия: монотонность и ограниченность; Практикум: поиск структуры функции.

Ведущая деятельность. Учащиеся начинают с подстановки специально выбранных значений и поиска ограничений на функцию, затем проверяют симметрии и преобразования аргументов и формулируют возможный вид решения. Найденная функция обязательно подставляется обратно; отдельно обсуждается, где использованы дополнительные условия и почему без них возможны другие решения.

Форма результата раздела: семинарское решение или мини-исследование, включающее постановку вопроса, корректное использование определений, доказательный или вычислительный фрагмент и указание границ применимости результата.

3. Проективная и неевклидова геометрия — 14 часов

Математическое содержание. Центральная проекция и идея проективной геометрии; Точки на бесконечности и параллельные прямые; Проективные преобразования и сохраняемые свойства; Двойное отношение: знакомство через конфигурации; Сферическая геометрия: прямые и треугольники на сфере; Модель Пуанкаре и геометрия Лобачевского; Сравнение геометрий: какие аксиомы меняют картину.

Ведущая деятельность. Геометрические идеи исследуются через построения, проекции и сравнение моделей. Учащиеся наблюдают, какие свойства сохраняются при проективном преобразовании, строят треугольники на сфере и в модели Пуанкаре и сопоставляют результат с евклидовой интуицией. Обсуждение выводит на роль аксиом и допустимых преобразований.

Форма результата раздела: семинарское решение или мини-исследование, включающее постановку вопроса, корректное использование определений, доказательный или вычислительный фрагмент и указание границ применимости результата.

4. Фракталы и динамические системы — 10 часов

Математическое содержание. Самоподобие и рекурсивная конструкция; Множество Кантора и идея размерности; Треугольник Серпинского и кривая Коха; Итерации функции как динамическая система; Множества Жюлиа и Мандельброта: компьютерный эксперимент.

Ведущая деятельность. Учащиеся строят фрактальные объекты по рекурсивному правилу, фиксируют изменение числа частей и масштаба, исследуют итерации функции вручную и с помощью вычислительного эксперимента. Компьютерная визуализация служит источником вопросов и гипотез, но выводы формулируются с явным указанием границ экспериментальной проверки.

Форма результата раздела: семинарское решение или мини-исследование, включающее постановку вопроса, корректное использование определений, доказательный или вычислительный фрагмент и указание границ применимости результата.

5. Наглядная топология — 8 часов

Математическое содержание. Лист Мёбиуса: одна сторона и один край; Эйлерова характеристика на многогранниках; Топологическая эквивалентность и деформации; Топологические головоломки и модели поверхностей.

Ведущая деятельность. Понятия вводятся через физические и бумажные модели: учащиеся исследуют лист Мёбиуса, деформации и поверхности, выделяя свойства, которые сохраняются при допустимых преобразованиях. Эйлерова характеристика проверяется на серии многогранников, после чего обсуждается, что является экспериментальным наблюдением, а что требует общего обоснования.

Форма результата раздела: семинарское решение или мини-исследование, включающее постановку вопроса, корректное использование определений, доказательный или вычислительный фрагмент и указание границ применимости результата.

6. Исследовательский семинар — 8 часов

Математическое содержание. Выбор темы и формулировка исследовательского вопроса; Работа с двумя источниками и математическими примерами; Подготовка доказательного или экспериментального фрагмента; Итоговый научный семинар и взаимное рецензирование.

Ведущая деятельность. Старшеклассники выбирают вопрос в одной из линий курса, работают как минимум с двумя источниками, собирают систему примеров и готовят собственный доказательный или экспериментальный фрагмент. На семинаре работа проходит взаимное рецензирование: автор уточняет определения, границы результата и формулировку вывода после содержательных вопросов.

Форма результата раздела: семинарское решение или мини-исследование, включающее постановку вопроса, корректное использование определений, доказательный или вычислительный фрагмент и указание границ применимости результата.

4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

К концу года ожидается положительная динамика не только в объёме математических знаний, но и в характере учебного поведения: обучающийся дольше удерживает сложную задачу, точнее формулирует вопрос, выбирает представление и способ, отделяет экспериментальную проверку от доказательства, умеет объяснять и пересматривать собственное решение.

Личностные результаты

- устойчивый интерес к математической деятельности, в которой ценится поиск, понимание и доказательство, а не только скорость получения ответа;
- готовность осваивать непривычное определение через примеры, контрпримеры и самостоятельный поиск связи с уже известной математикой;
- ответственное отношение к точности математической записи, корректности аргумента и честности при представлении собственного результата;
- уважение к иной стратегии решения, способность критиковать математический аргумент, не переходя к оценке личности участника обсуждения;
- академическая добросовестность при работе с математическими источниками и семинарским материалом, ясное различение собственной идеи и заимствованного результата.

Метапредметные результаты

Познавательные универсальные действия

- выделять структуру незнакомой задачи, существенные данные, ограничения и скрытые связи;
- переводить ситуацию между словесной, числовой, графической, геометрической, табличной и символической формами;
- выдвигать гипотезу на основании частных случаев, целенаправленно искать подтверждение и контрпример;
- сравнивать методы по общности, надёжности, вычислительной сложности и прозрачности доказательства;
- формулировать новый вопрос, возникающий из решённой задачи, и намечать способ его исследования.

Регулятивные универсальные действия

- планировать поиск решения, выделять промежуточные цели и менять стратегию при появлении новой информации;
- контролировать логические переходы и вычисления, отличать проверку примерами от общего доказательства;
- использовать ошибку и неудачный пример для уточнения условия или отказа от неверной гипотезы;
- оценивать достаточность полученного результата относительно поставленного вопроса;
- вести краткую исследовательскую запись: вопрос, примеры, гипотеза, проверка, доказательство или вывод.

Коммуникативные универсальные действия

- представлять решение устно и письменно так, чтобы ход рассуждения мог быть проверен другим участником;
- задавать содержательные вопросы к решению, различать просьбу о пояснении и математическое возражение;
- слушать альтернативный способ и точно воспроизводить его основную идею перед критическим сравнением;
- работать в паре или группе, распределяя исследовательские действия и сохраняя личную ответственность за понимание общего результата;
- участвовать в математическом семинаре, защите или рецензировании с использованием корректной терминологии.

Предметные результаты

- выполняет основные операции с комплексными числами и использует комплексную плоскость для геометрической интерпретации;

- решает доступные функциональные уравнения методами подстановки, симметрии и анализа дополнительных условий;
- объясняет различия между евклидовой, сферической и гиперболической моделями на конкретных примерах;
- строит и исследует простые фрактальные и итерационные процессы;
- использует базовые топологические идеи для анализа моделей поверхностей;
- самостоятельно осваивает небольшую новую тему и представляет её в форме математического семинара.

Математическая грамотность и исследовательская культура

- формулирует исследовательский вопрос, который допускает работу с примерами, доказательством или вычислительным экспериментом;
- читает короткий математический текст, выделяет определения, утверждения и примеры;
- сопоставляет результаты из двух источников и проверяет их на собственных примерах;
- готовит выступление, в котором ясно разделены мотивация, математическая идея, обоснование и открытые вопросы.

5. КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК

Календарный график является рамочным. Фактические даты начала и окончания занятий, каникул и праздничных дней уточняются в соответствии с календарным учебным графиком образовательной организации.

Показатель	Значение
Период реализации	сентябрь 2026 г. – май 2027 г.
Продолжительность	34 учебные недели
Общий объём	68 академических часов
Режим	1 занятие в неделю по 2 академических часа
Каникулы и нерабочие дни	в соответствии с календарным учебным графиком образовательной организации
Итоговое мероприятие	последнее занятие курса: защита / итоговая исследовательская работа

6. КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Темы КТП описывают математическую ситуацию занятия, но не требуют единственного сценария. При сохранении целей, объёма и планируемых результатов программы педагог вправе изменять набор конкретных задач, если они соответствуют содержанию программы и обеспечивают достижение заявленных образовательных результатов.

№	Тема занятия	Теория	Практика	Всего	Форма контроля	Дата проведения
1	Комплексное число как новая числовая система	1	1	2	Входная диагностика в ходе решения задачи	
2	Арифметика комплексных чисел и комплексная плоскость	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
3	Модуль и аргумент	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	

№	Тема занятия	Теория	Практика	Всего	Форма контроля	Дата проведения
4	Геометрический смысл сложения и умножения	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
5	Тригонометрическая форма и формула Муавра	1	1	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
6	Корни комплексного числа	0	2	2	Письменная защита фрагмента решения	
7	Корни из единицы и симметрии правильных многоугольников	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
8	Комплексный практикум: геометрические места точек	1	1	2	Задача на перенос; краткая защита решения	
9	Что такое функциональное уравнение	1	1	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
10	Метод специальных подстановок	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
11	Симметрия аргументов и замена переменных	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
12	Функциональные уравнения на целых и рациональных числах	0	2	2	Письменная защита фрагмента решения	
13	Дополнительные условия: монотонность и ограниченность	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
14	Практикум: поиск структуры функции	1	1	2	Задача на перенос; краткая защита решения	
15	Центральная проекция и идея проективной геометрии	1	1	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
16	Точки на бесконечности и параллельные прямые	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
17	Проективные преобразования и сохраняемые свойства	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	

№	Тема занятия	Теория	Практика	Всего	Форма контроля	Дата проведения
18	Двойное отношение: знакомство через конфигурации	1	1	2	Письменная защита фрагмента решения	
19	Сферическая геометрия: прямые и треугольники на сфере	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
20	Модель Пуанкаре и геометрия Лобачевского	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
21	Сравнение геометрий: какие аксиомы меняют картину	1	1	2	Задача на перенос; краткая защита решения	
22	Самоподобие и рекурсивная конструкция	1	1	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
23	Множество Кантора и идея размерности	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
24	Треугольник Серпинского и кривая Коха	0	2	2	Письменная защита фрагмента решения	
25	Итерации функции как динамическая система	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
26	Множества Жюлиа и Мандельброта: компьютерный эксперимент	1	1	2	Задача на перенос; краткая защита решения	
27	Лист Мёбиуса: одна сторона и один край	1	1	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
28	Эйлерова характеристика на многогранниках	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
29	Топологическая эквивалентность и деформации	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
30	Топологические головоломки и модели поверхностей	1	1	2	Задача на перенос; краткая защита решения	
31	Выбор темы и формулировка исследовательского вопроса	1	1	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
32	Работа с двумя источниками и математическими примерами	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	

№	Тема занятия	Теория	Практика	Всего	Форма контроля	Дата проведения
33	Подготовка доказательного или экспериментального фрагмента	0	2	2	Наблюдение, обсуждение, проверка решения	
34	Итоговый научный семинар и взаимное рецензирование	1	1	2	Итоговый контроль / итоговая работа	

7. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Входная диагностика

Входная диагностика проводится в ходе первой содержательной задачи и не имеет характера школьной контрольной работы. Педагог наблюдает, как обучающийся читает условие, создаёт представление, проверяет частный случай, реагирует на затруднение, объясняет идею и воспринимает вопрос к собственному решению. Результаты используются для выбора уровня подсказок и продолжений, а не для рейтинга группы.

Текущий контроль

- наблюдение за ходом самостоятельного поиска и краткая педагогическая фиксация трудностей;
- короткое письменное решение или фрагмент доказательства;
- задача на перенос без указания, какой метод следует применить;
- взаимное рецензирование решения по заранее обсуждённым критериям;
- мини-семинар: объяснение идеи решения и ответы на математические вопросы группы;
- исследовательская заметка: примеры, гипотеза, попытка проверки, контрпример или уточнение условия.

Промежуточная аттестация

После крупных содержательных блоков проводится работа из 2–3 задач или математический семинар. Как минимум одна задача не маркируется названием темы или метода. Оценивается не скорость воспроизведения алгоритма, а качество представления, осмысленность выбора метода, полнота аргументации, способность проверить результат и объяснить решение.

Итоговый контроль и форма подведения итогов

Итоговая работа имеет формат индивидуального или парного математического исследования. В ней должны присутствовать постановка вопроса, определения и математический аппарат, собственный доказательный или вычислительный фрагмент, проверка, выводы, указание ограничений результата и список использованных источников. Итог завершается публичной защитой.

Критерии оценивания

- понимание математической структуры задачи и корректное использование понятий;
- самостоятельность выбора представления и метода;
- доказательность: обоснование ключевых переходов и различение примера, проверки и общего доказательства;
- математическая коммуникация: ясность записи, устного объяснения и ответов на вопросы;
- исследовательская самостоятельность: гипотеза, контрпример, обобщение, изменение условия или собственный вопрос;
- рефлексия: способность указать, что было изменено в стратегии и почему.

Уровни достижения планируемых результатов

Уровень	Характеристика
Требуется существенная поддержка	обучающийся понимает отдельные элементы задачи, но не удерживает план решения без серии направляющих вопросов; аргументация фрагментарна.
Частично самостоятельный	способ решения найден с ограниченной поддержкой; основные действия верны, но обоснование или перенос в изменённую ситуацию требуют уточнения.
Самостоятельный	обучающийся самостоятельно выбирает способ, получает и обосновывает результат, может объяснить решение и выполнить задачу на перенос.
Самостоятельный с развитием идеи	обучающийся не только решает и обосновывает задачу, но и обобщает результат, находит альтернативу, контрпример или формулирует продуктивное продолжение.

Примеры оценочных материалов

- Исследовать геометрическое действие умножения на фиксированное комплексное число и описать, какие преобразования плоскости возникают.
- Решить функциональное уравнение несколькими специальными подстановками и объяснить, какие подстановки оказались определяющими.
- Сравнить сумму углов треугольника в евклидовой и сферической геометрии на конкретных моделях и сформулировать вывод.

Конкретные числовые данные и формулировки задач педагог может заменять, сохраняя математическую идею, возрастную сложность и критерии оценивания. Оценочные материалы не должны превращать кружок в систему регулярных школьных контрольных работ.

8. ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ

Материально-технические условия

Для реализации программы необходим учебный кабинет, доска или интерактивная панель, бумага для черновых построений и групповой работы, линейки и чертёжные принадлежности по необходимости, наборы карточек, фишек, кубиков и других простых средств математического эксперимента. Для отдельных тем может использоваться компьютер или планшет с доступом к электронным математическим ресурсам, динамической геометрии, электронным таблицам или среде для простого вычислительного эксперимента.

Методические принципы

- содержательная задача предшествует сообщению готового алгоритма;
- доступный первый шаг и глубокое продолжение одной математической ситуации;
- обязательное время на индивидуальный поиск до коллективного разбора;
- ценность нескольких корректных способов и их содержательного сравнения;
- регулярные вопросы «что изменится, если...?», «всегда ли это верно?», «можно ли обобщить?», «где контрпример?»;
- различие вычислительного или визуального эксперимента и математического доказательства;
- постепенное увеличение самостоятельности от управляемого исследования к собственному математическому вопросу.

Психолого-педагогические условия

На занятии поддерживается безопасная для интеллектуального риска среда: ошибочная гипотеза рассматривается как рабочий материал, если обучающийся готов её проверять и корректировать. Педагог не подменяет поиск быстрым сообщением решения, но и не превращает трудность в испытание на выносливость: помощь даётся ступенчато — вопросом к условию, предложением построить частный случай, выбрать представление, проверить пример. Темп и глубина продолжения варьируются.

Воспитательный потенциал программы

Воспитательный потенциал программы связан с развитием академической культуры старшеклассника: уважением к интеллектуальному труду, корректным использованием источников, ответственностью за доказательство и готовностью обсуждать незнакомую идею без оценки личности автора. Семинарская работа формирует привычку задавать содержательные вопросы, признавать границы собственного знания и дорабатывать аргумент после критики.

Требования к педагогу

Педагог должен владеть школьной математикой на углублённом уровне, методикой решения нестандартных задач и культурой математического доказательства; уметь вести обсуждение без преждевременной выдачи способа, видеть несколько стратегий, задавать вопросы к обоснованию и организовывать исследовательскую работу. Для старших классов желателен опыт чтения университетских математических текстов и сопровождения учебных исследований.

9. ЭЛЕКТРОННЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ

Рекомендуемые ресурсы

- Единое содержание общего образования — <https://edsoo.ru/> (для сверки с обязательным школьным содержанием и недопущения дублирования);
- Олимпиада «Сириус» — <https://siriusolymp.ru/> (задачи и разборы математических соревнований);
- Mathus — <https://mathus.ru/> (тематические подборки нестандартных и олимпиадных задач);
- ФИПИ — <https://fipi.ru/> (для старших классов — исключительно как средство сопоставления с экзаменационным содержанием, а не как основа кружка).

- Art of Problem Solving — <https://artofproblemsolving.com/school>
- NRIC, University of Cambridge — <https://nrich.maths.org/>
- Math Circles — <https://mathcircles.org/>
- MIT PRIMES STEP — <https://math.mit.edu/research/highschool/primes/step.php>
- MIT PRIMES — <https://math.mit.edu/research/highschool/primes/>
- Stanford University Mathematics Camp (SUMaC) — <https://sumac.spcs.stanford.edu/>
- Canada/USA Mathcamp — <https://www.mathcamp.org/math/>
- MathILy — <https://www.mathily.org/why.html>